Systeme II

8. Die physikalische Schicht (Teil 4)

Thomas Janson°, Kristof Van Laerhoven*, Christian Ortolf°

Folien: Christian Schindelhauer°

Technische Fakultät

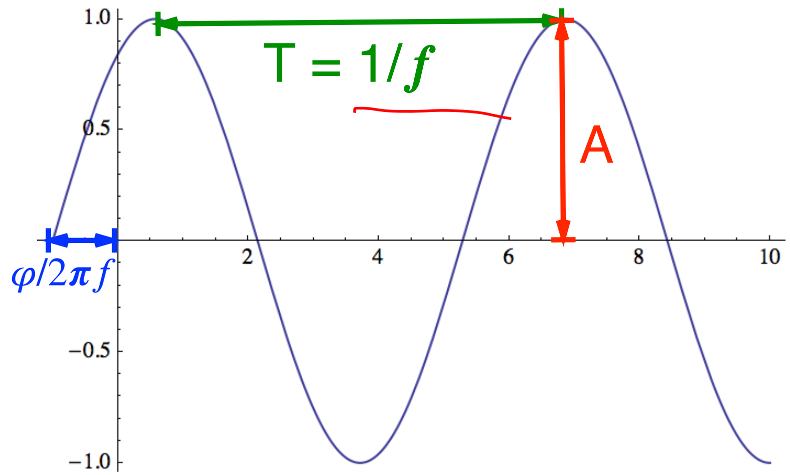
°: Rechnernetze und Telematik, *: Eingebettete Systeme

Rückblick Breitband

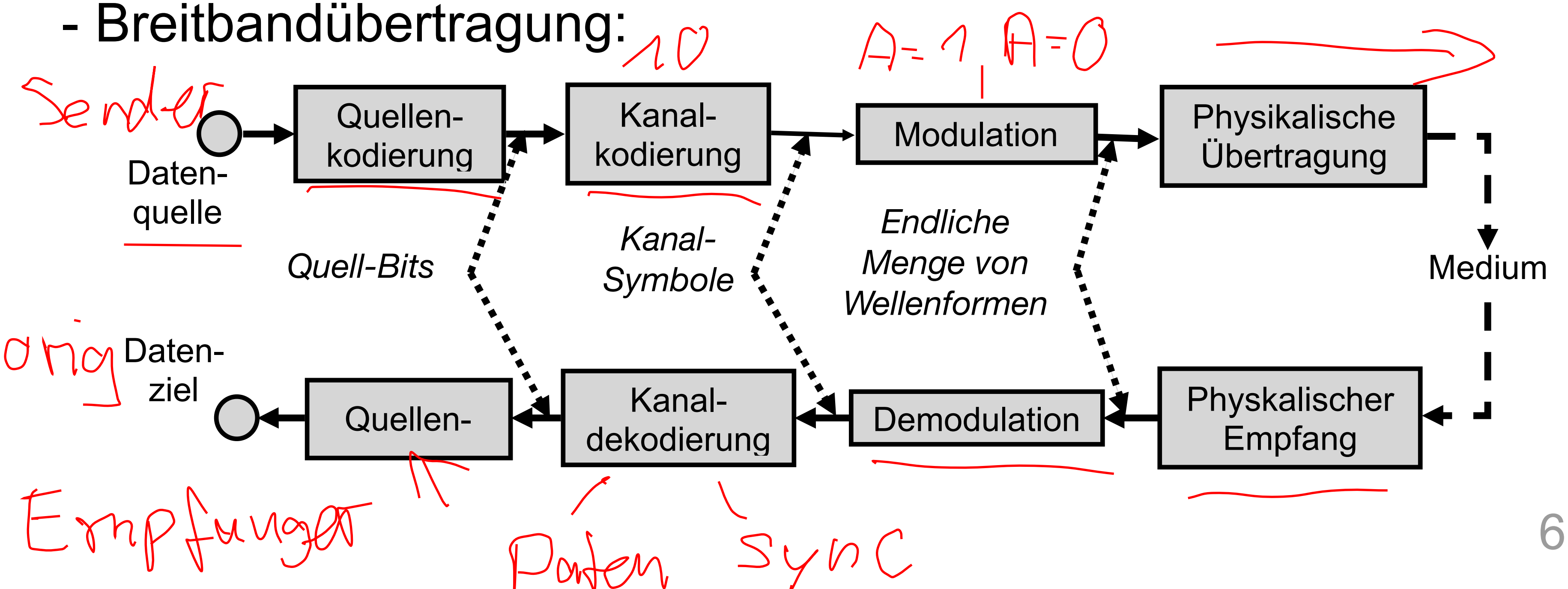
- Amplitudendarstellung *s*(*t*) einer Sinusschwingung

$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

- A: Amplitude
- ϕ: Phasenverschiebung
- f : Frequenz = 1/T
- T: Periode

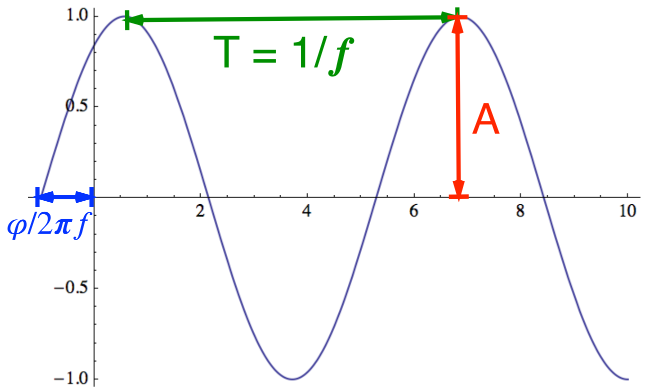


- Breitbandübertragung:



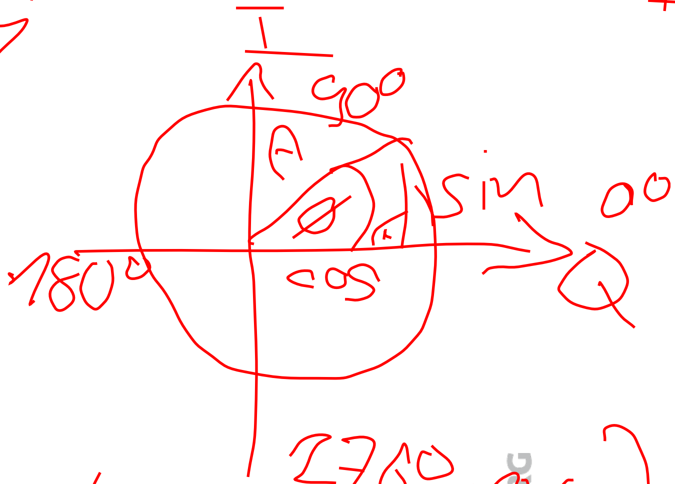
Beispiel: Hardware für Amplituden-/ Phasenmodulation bei Funk

Signal $s(t) = A\sin(2\pi f t + \phi)$



$Q \cdot \cos(2\pi f t) + I \cdot \sin(2\pi f t)$

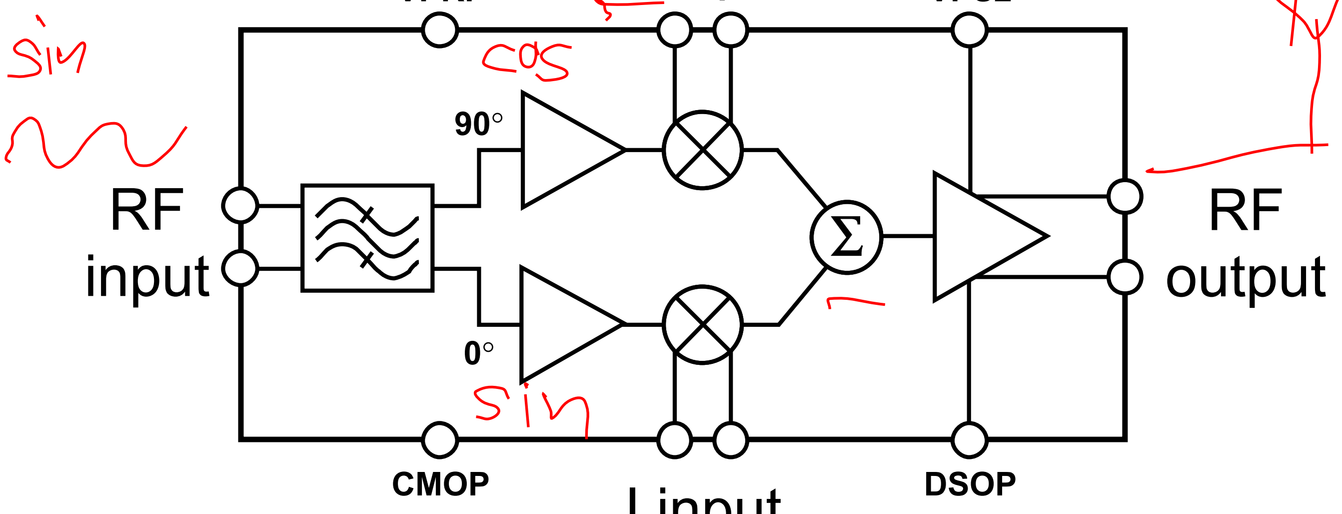
Winkel θ		out
$0°$	$Q=1,\ I=0$	$\cos(2\pi f t)$
$90°$	$Q=0,\ I=1$	$\sin(2\pi f t) = \cos(2\pi f t - 90°)$
$180°$	$Q=-1,\ I=0$	$-\cos = \cos(\omega t + 180°)$
$270°$	$Q=0,\ I=-1$	



$\phi = \arctan(Q/I)$

$A = \sqrt{I^2 + Q^2}$

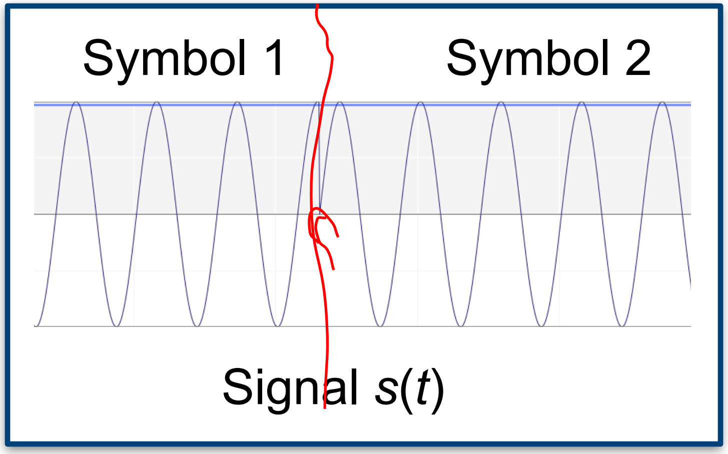
Hardware

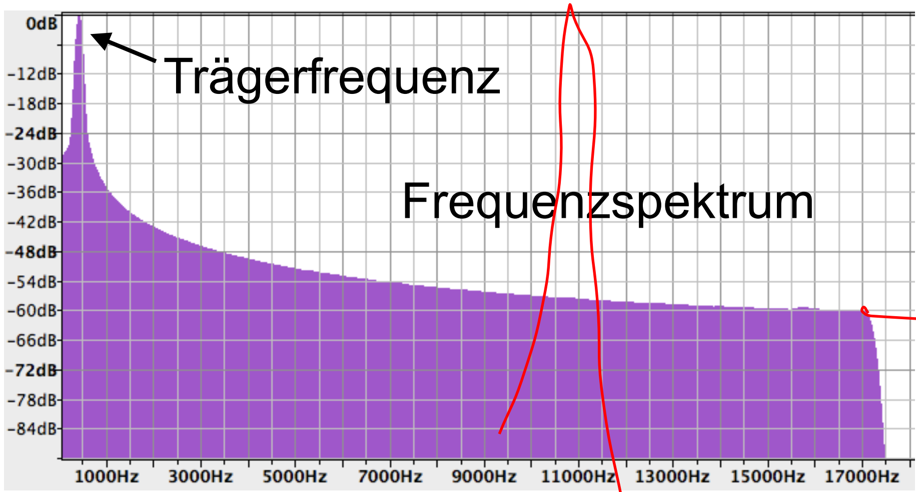


[Beispielhardware AD8341]

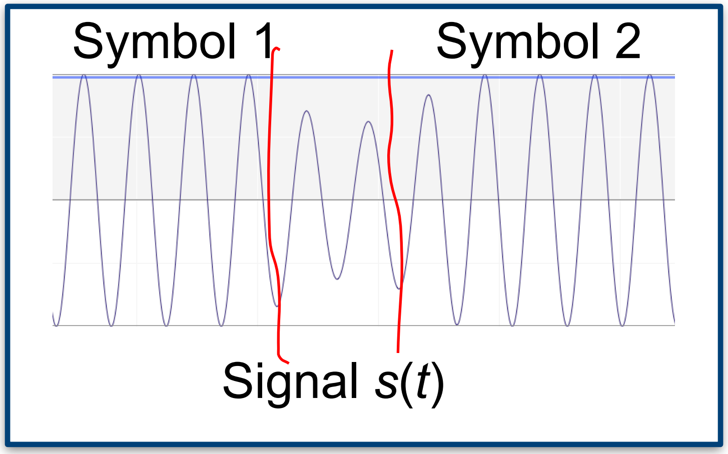
Welche Frequenzen treten auf?

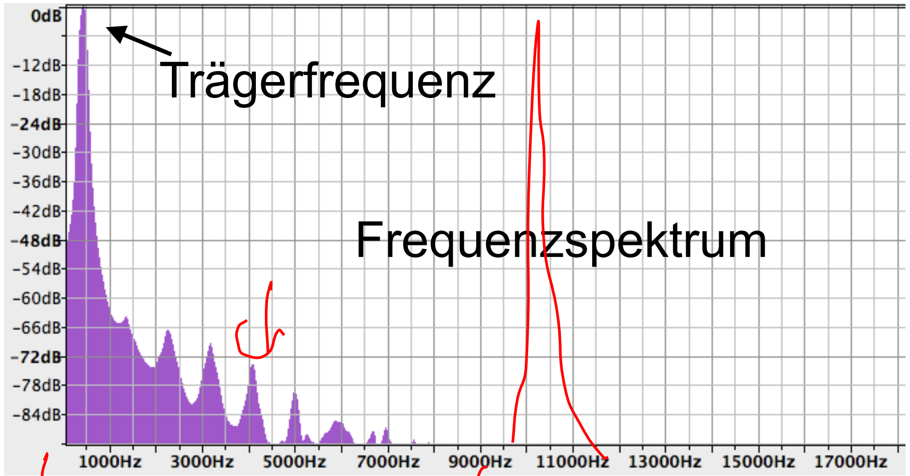
- Phasenmodulation mit hartem Übergang:





- Phasenmodulation mit glattem Übergang:



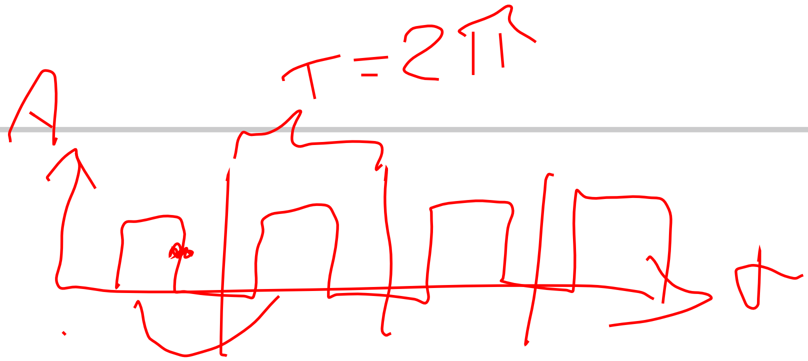


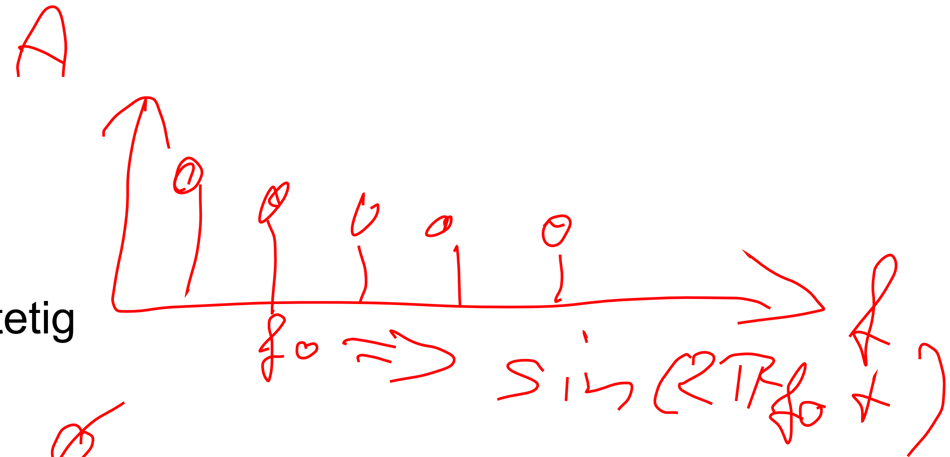
Band

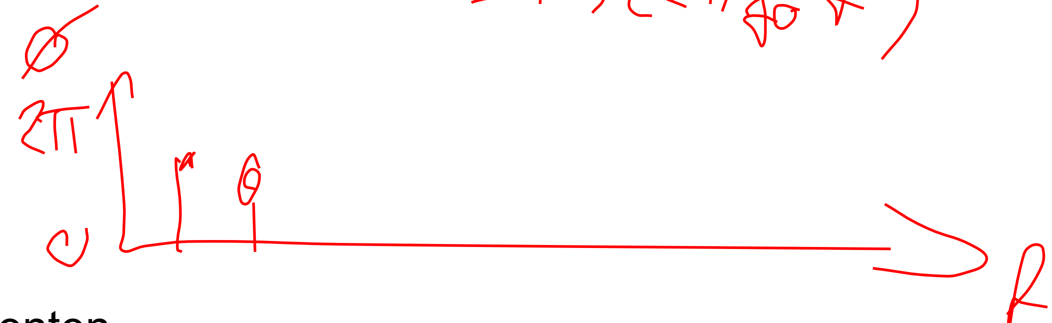
Fouriertransformation

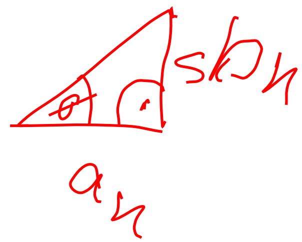
- Fouriertransformation einer periodischen Funktion:
  - Zerlegung in verschiedene
  - Sinus/Cosinus-Funktionen
- Dirichletsche Bedingungen einer periodischen Funktion f:
  - $f(x) = f(x+2\pi)$
  - $f(x)$ is in $(-\pi,\pi)$ in endlich vielen Intervallen stetig und monoton
  - Falls f nicht stetig in x_0, dann ist $f(x_0)=(f(x_0-0)+f(x_0+0))/2$
- Satz von Dirichlet:
  - $f(x)$ genüge in $(-\pi,\pi)$ den Dirichletschen Bedingungen. Dann existieren Fourierkoeffizienten $a_0,a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ so dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x)$$









$\phi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

CoNe Freiburg

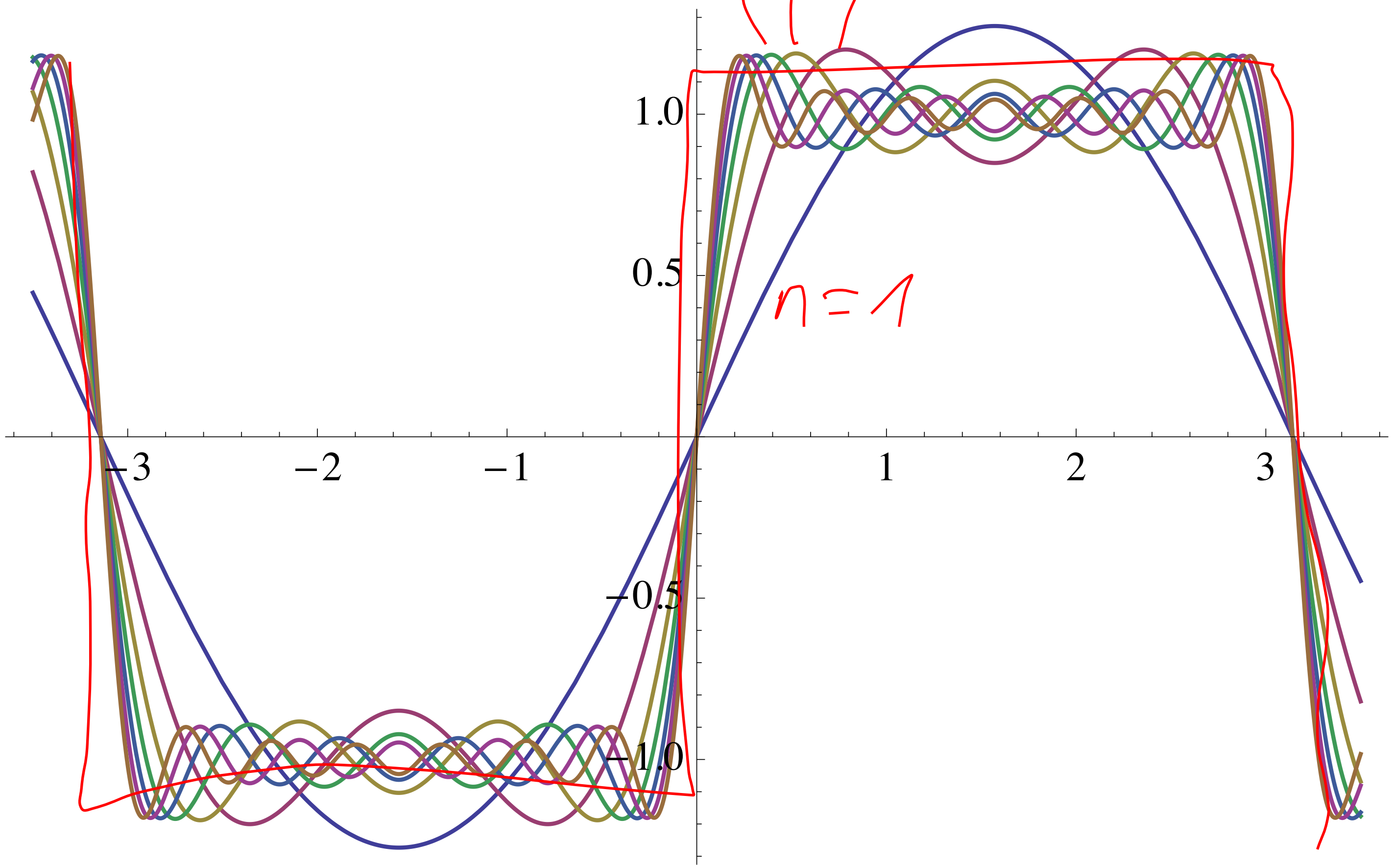
Fouriertransformation

- Fouriertransformation einer periodischen Funktion:
  - Zerlegung in verschiedene
  - Sinus/Cosinus-Funktionen

1 $\quad 2\pi f t$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x)$$

n=4 n=3 n=2



UNI FREIBURG

Berechnung der Fourierkoeffizienten

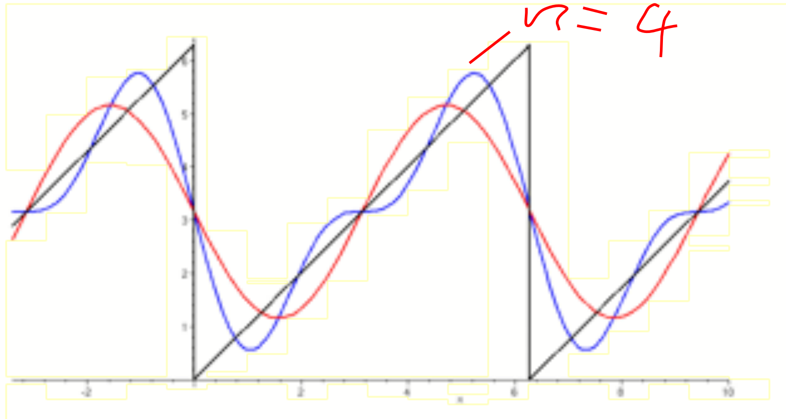
- Die Fourierkoeffizienten a_i, b_i können wie folgt berechnet werden:
  - Für k = 0,1,2,…

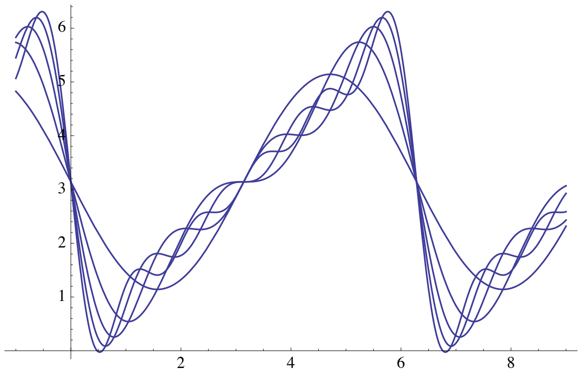
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx$$

  - Für k = 1,2,3,…

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx$$

$n = 4$

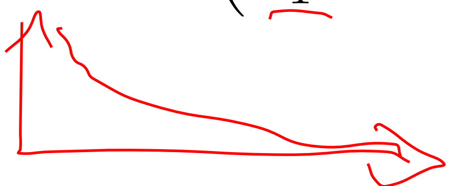




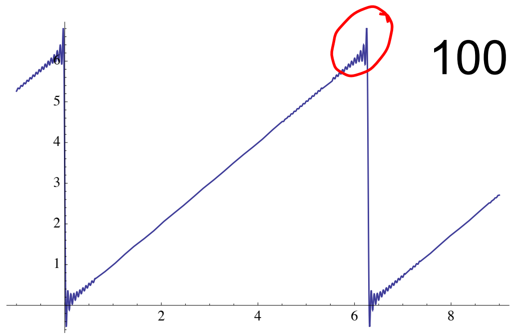
- Beispiel: Sägezahnkurve

$$f(x) = x \text{ , für } 0 < x < 2\pi$$

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right)$$



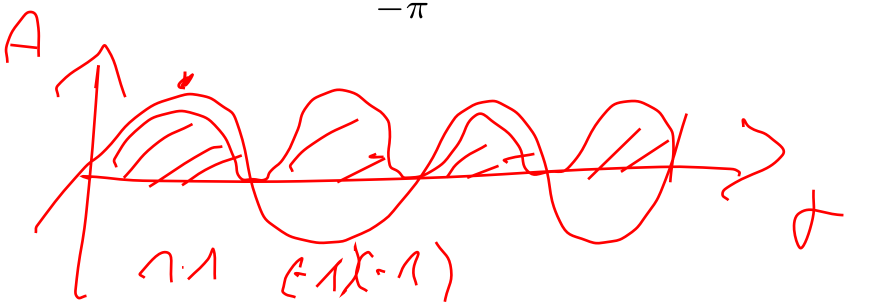
100 Terme



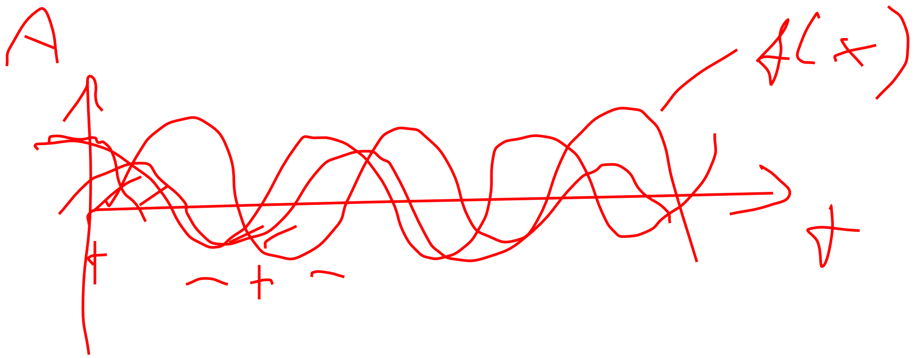
Korrelation mit Kosinus und Sinus

- Die Fourierkoeffizienten $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \underbrace{\sin(x)\cdot\sin(x)}_{f(x)}\,dx = \pi$$



$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(x)\cdot\underbrace{\cos(x)}\,dx = 0$$



CoNe Freiburg

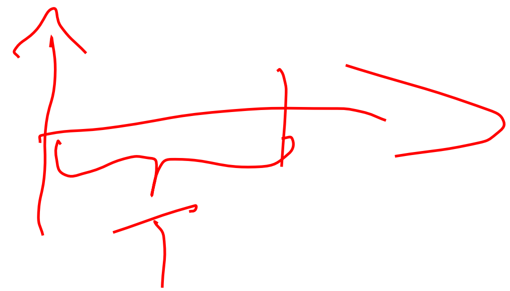
Fourier-Analyse für allgemeine Periode

- Der Satz von Fourier für Periode T=1/f:
  - Die Koeffizienten c, a_n, b_n ergeben sich dann wie folgt

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T = 2\pi} g(t) \cos(2\pi n f t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(2\pi n f t) dt$$



- Die Quadratsumme der k-ten Terme ist proportional zu der Energie, die in dieser Frequenz verbraucht wird:

$A = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\quad E = (a_k)^2 + (b_k)^2$ $\quad E = A^2$

Spannung U

Strom I

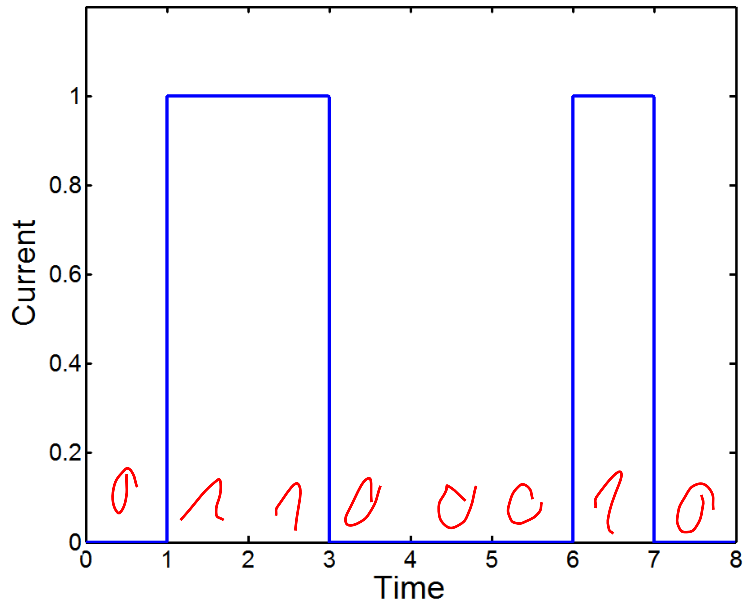
Leistung $P = U \cdot I$

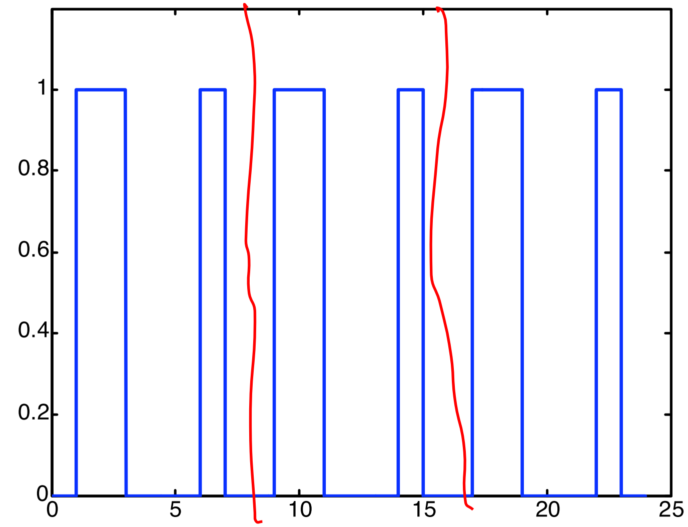
$P = \frac{U^2}{R}$

UNI FREIBURG

Anwendung der Fourier-Analyse

- Problem:
  - Signal ist nicht periodisch
- Lösung:
  - Wiederholung des Signals mit Periode 8

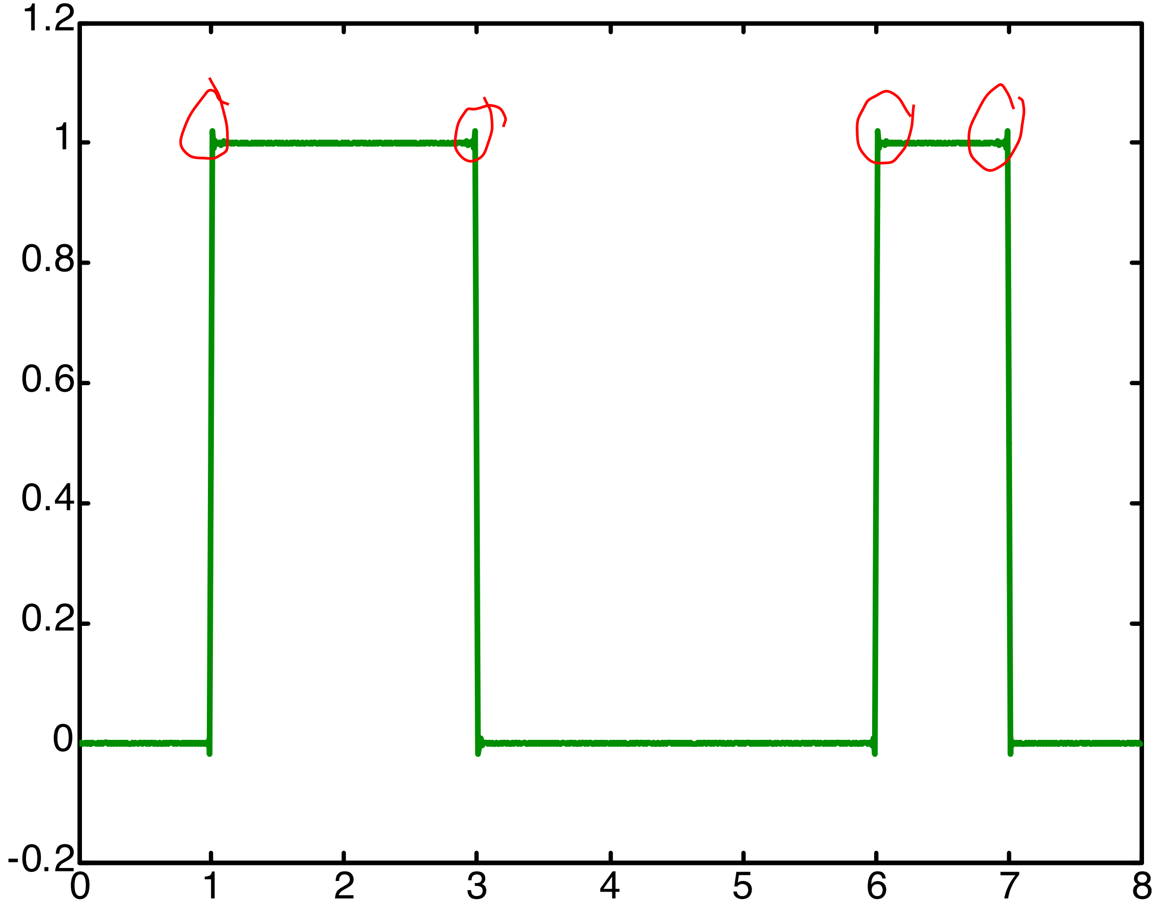




(aus Vorlesung von Holger Karl)

Anwendung der Fourier-Analyse

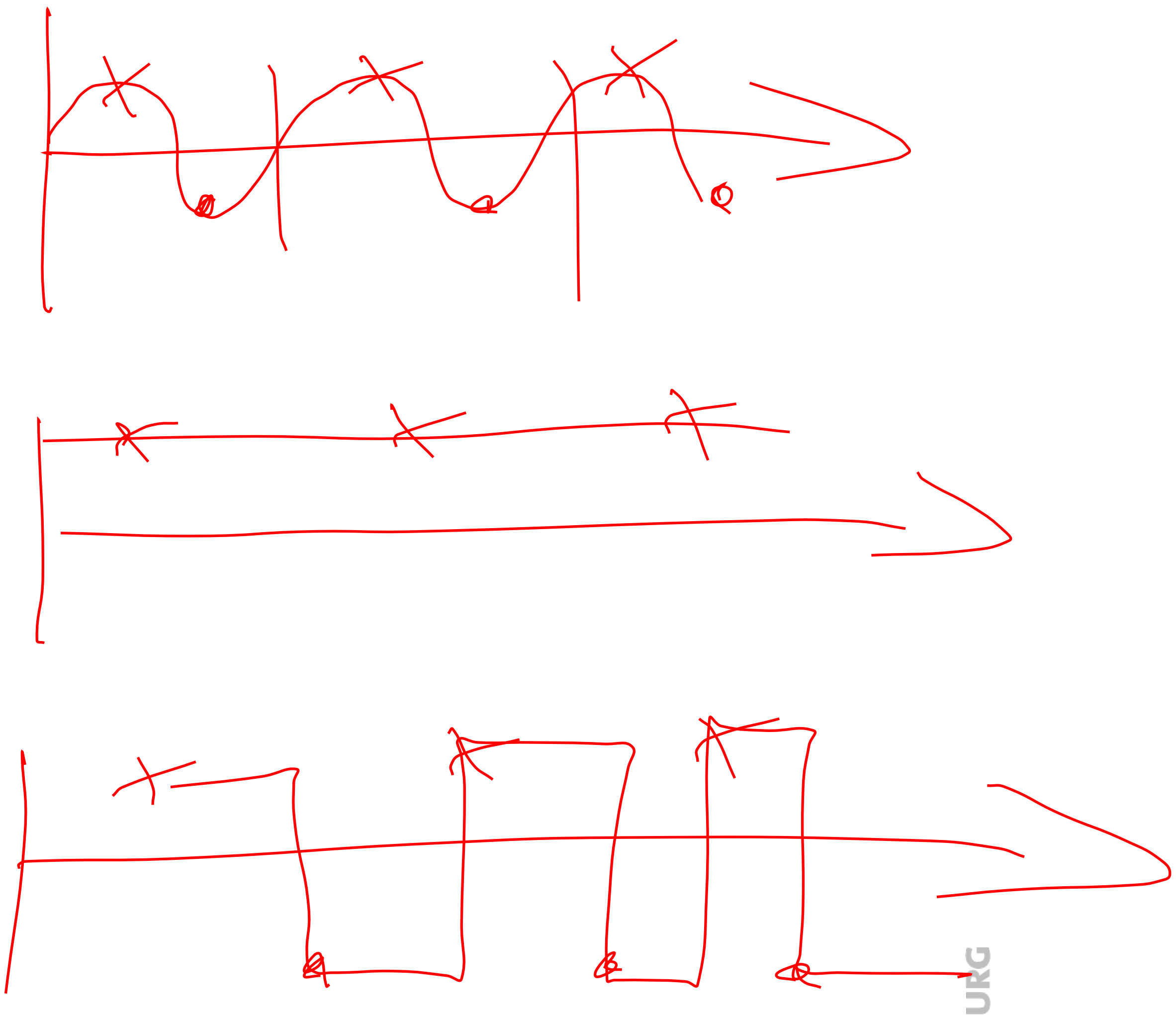
- Fourier-Analyse mit 512 Termen:



(aus Vorlesung von Holger Karl)

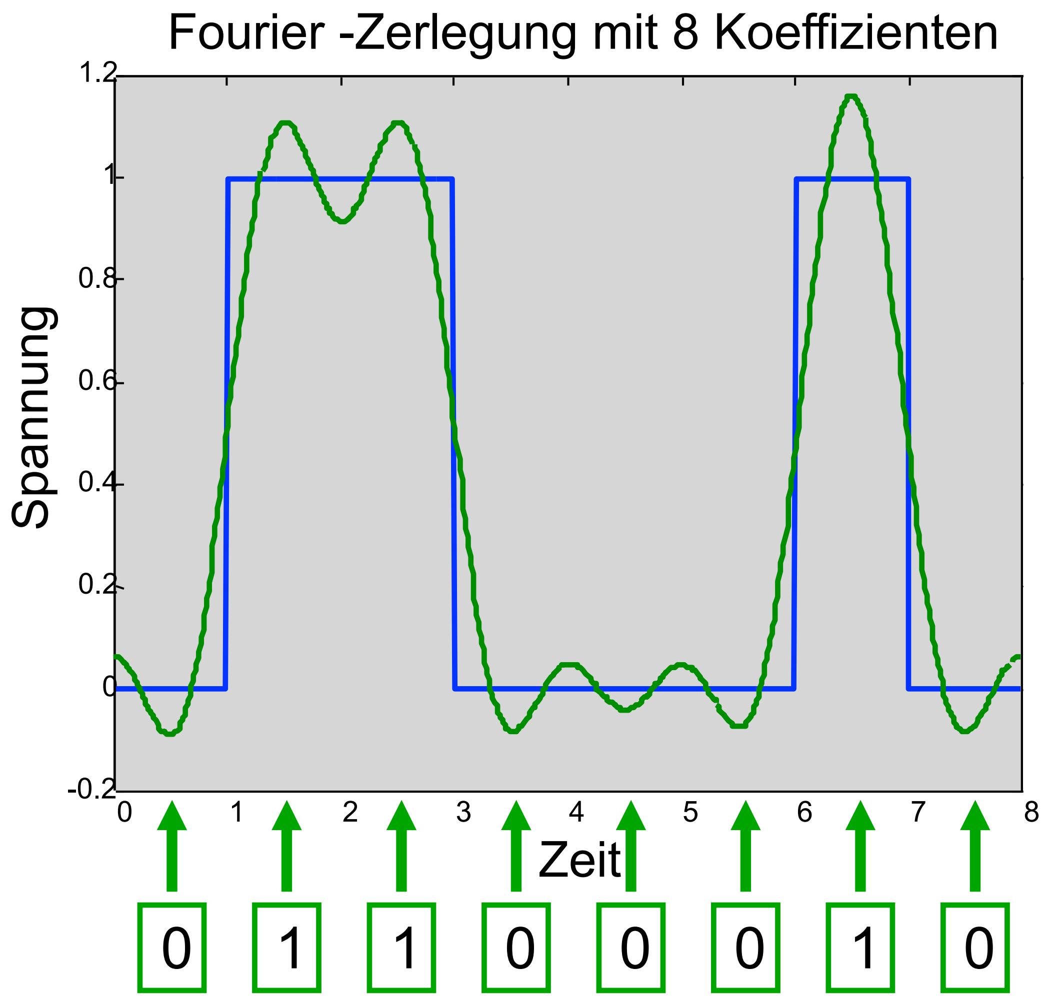
Wie oft muss man messen?

- Wie viele Messwerte sind notwendig, um eine Fouriertransformation bis zur *k*-ten Komponenten genau zu bestimmen?



Wie oft muss man messen?

- Wie viele Messwerte sind notwendig, um eine Fouriertransformation bis zur *k*-ten Komponenten genau zu bestimmen?
- Nyquist-Shannon-Abtasttheorem
  - Um ein kontinuierliches bandbegrenztes Signal mit einer Maximalfrequenz f_{max} zu rekonstruieren, braucht man mindestens eine Abtastfrequenz von $2 \cdot f_{max}$.



Shannon-Hartley Theorem

00100

- Definition
  - Die Bandbreite H ist die Maximalfrequenz in der Fourier-Zerlegung

Hz

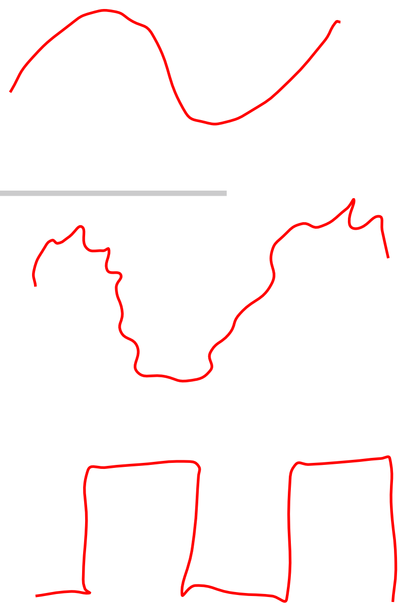
- angenommen:
  - Die maximale Frequenz f des empfangenen Signals ist $f=H$ in der Fouriertransformation
    - (Komplette Absorption [unendliche Dämpfung] aller höheren Frequenzen)
  - Die Anzahl der verschiedenen verwendeten Symbole ist V

Log V

  - Es treten keinerlei anderen Störungen, Verzerrungen oder Dämpfungen auf
- Shannon-Hartley Theorem
  - Die maximal mögliche Symbolrate ist höchstens $2 \cdot H$ baud.
  - Die maximal mögliche Datenrate ist höchstens $2 \cdot H \cdot \log_2(V)$ bit/s.

CoNe Freiburg

Helfen mehr Symbole?



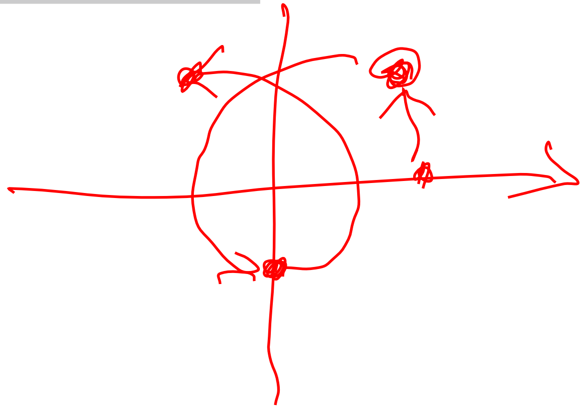
- nach Nyquists Theorem steigt die Datenrate rein theoretisch mit der Anzahl Symbole
- Diskussion:
  - in der Praxis Messungenauigkeiten und Rauschen

UNI FREIBURG

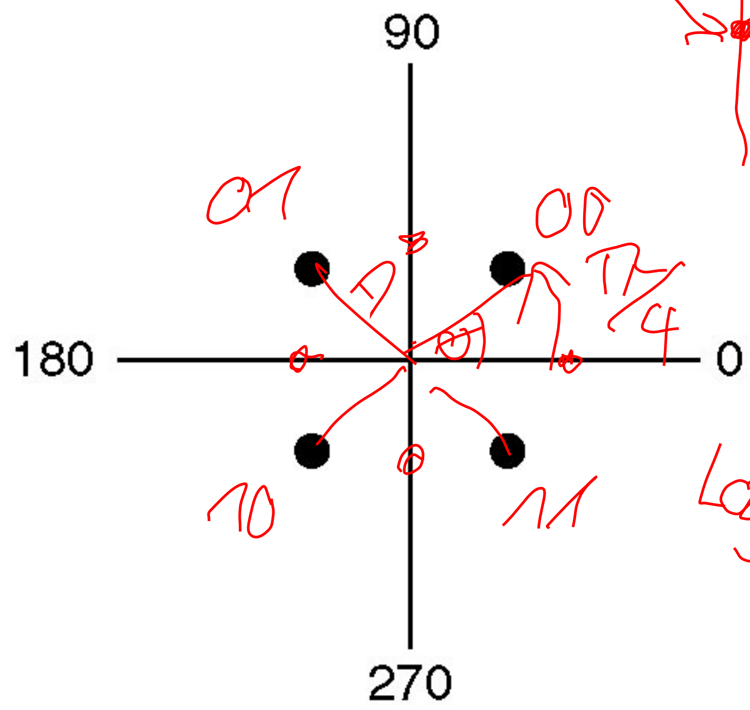
PSK mit verschiedenen Symbolen

CoNe Freiburg

00 10 00



- Phasenverschiebungen können vom Empfänger sehr gut erkannt werden
- Kodierung verschiedener Symbole sehr einfach
  - Man verwendet Phasenverschiebung z.B. π/4, 3/4π, 5/4π, 7/4π
    - selten: Phasenverschiebung 0 (wegen Synchronisation)
  - Bei vier Symbolen ist die Datenrate doppelt so groß wie die Symbolrate
- Diese Methode heißt Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)

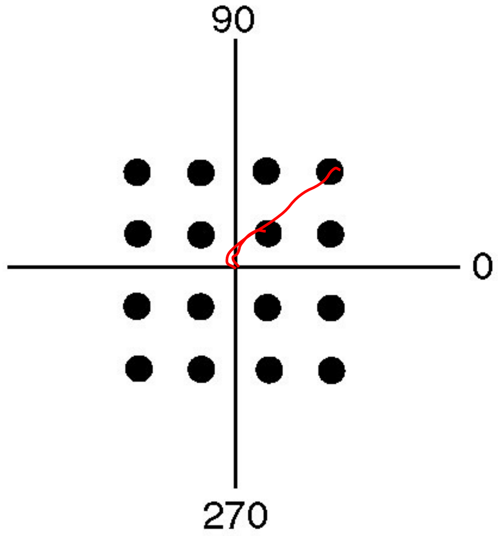


$\log_2 8 = 3$

$\underbrace{A}_{\text{const}} \cdot \sin(2\pi \underbrace{f}_{\text{const}} t + \underline{\emptyset})$

Amplituden- und Phasenmodulation

- Amplituden- und Phasenmodulation können erfolgreich kombiniert werden
- Beispiel: 16-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
  - Man verwendet 16 verschiedene Kombinationen von Phasen und Amplituden für jedes Symbol
  - Jedes Symbol kodiert vier Bits ($2^4 = 16$)
  - Die Datenrate ist also viermal so groß wie die Symbolrate



QAM und Rauschen

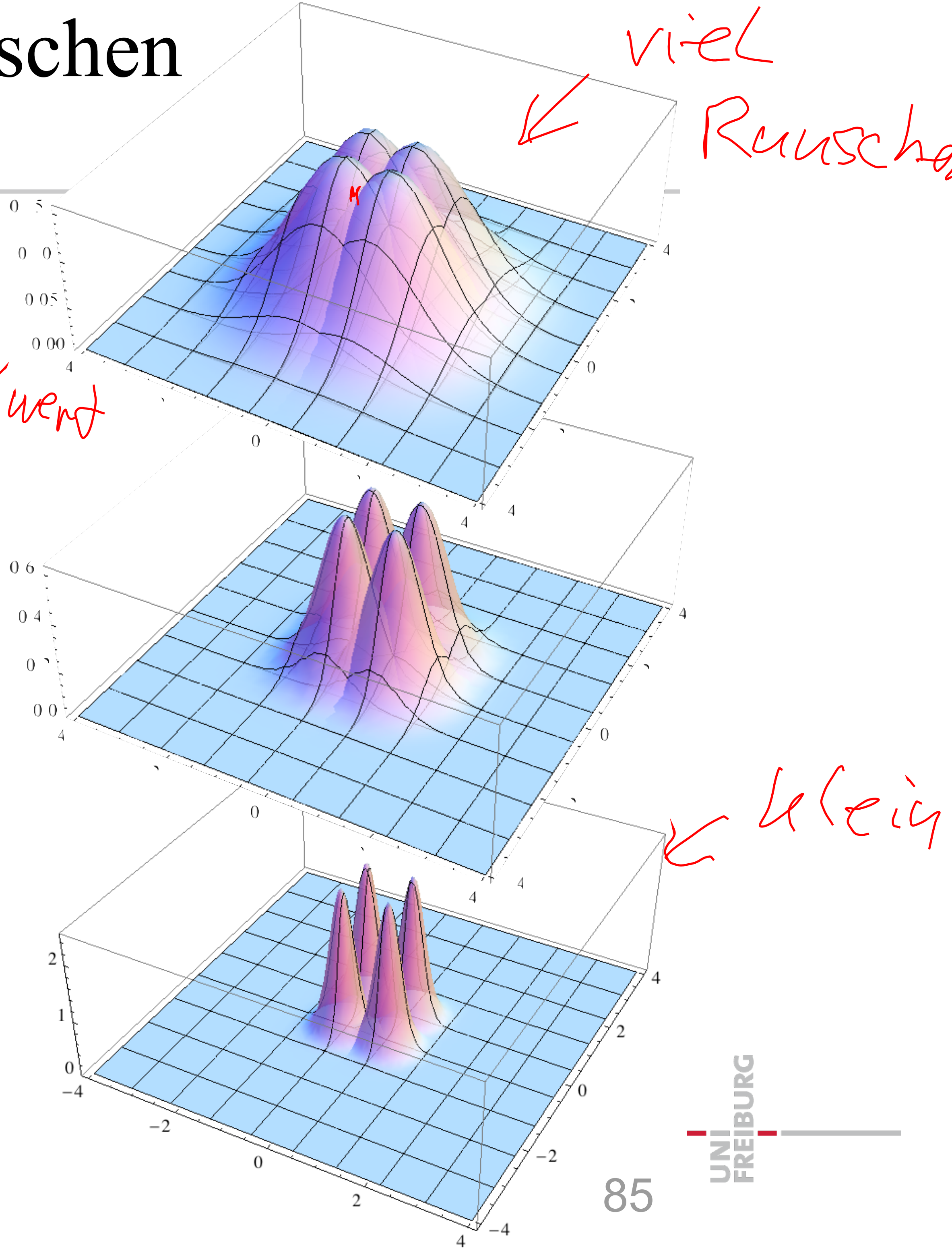
- Rauschen wird mit der Normalverteilung beschrieben

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

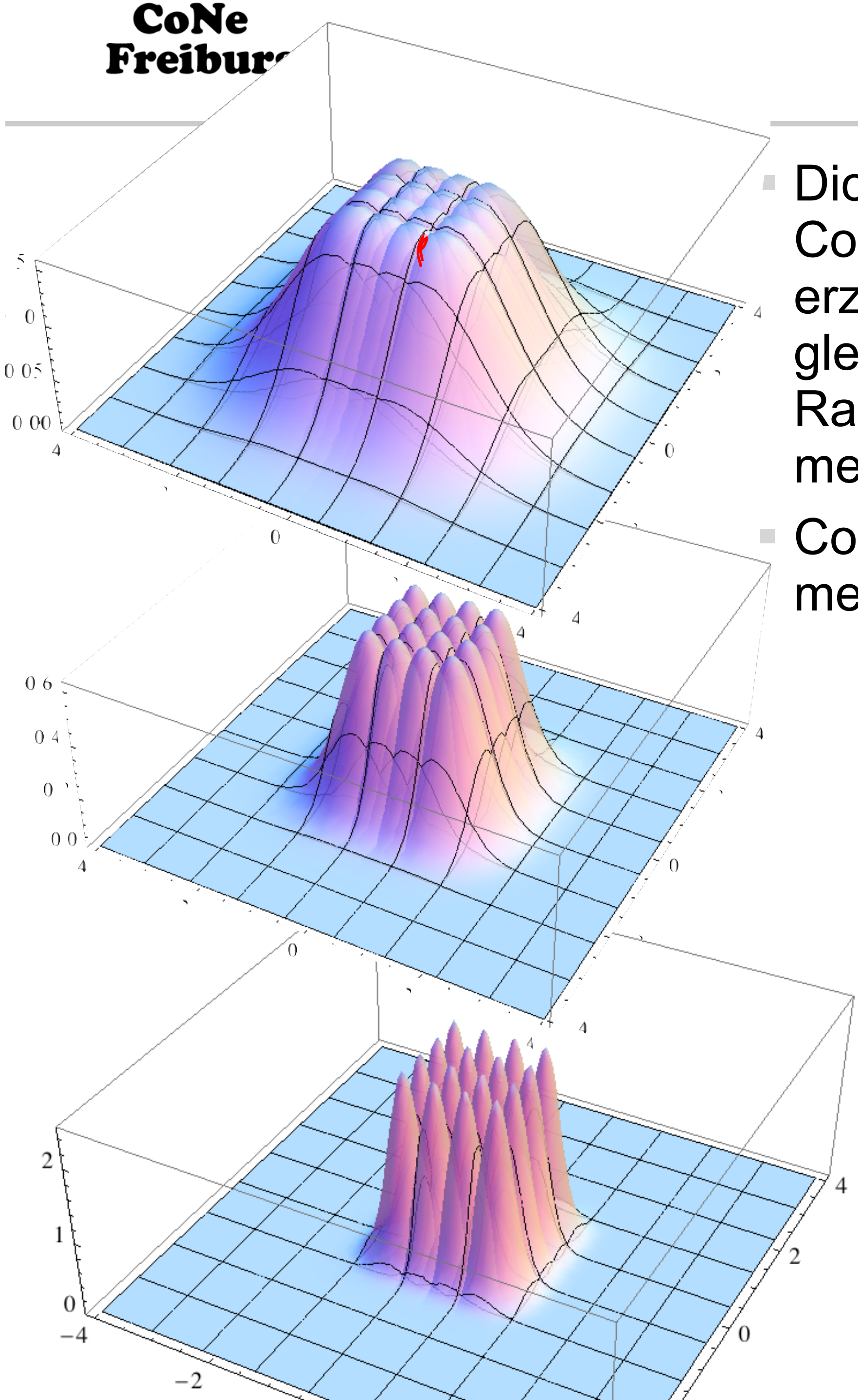
Mittelwert

Var

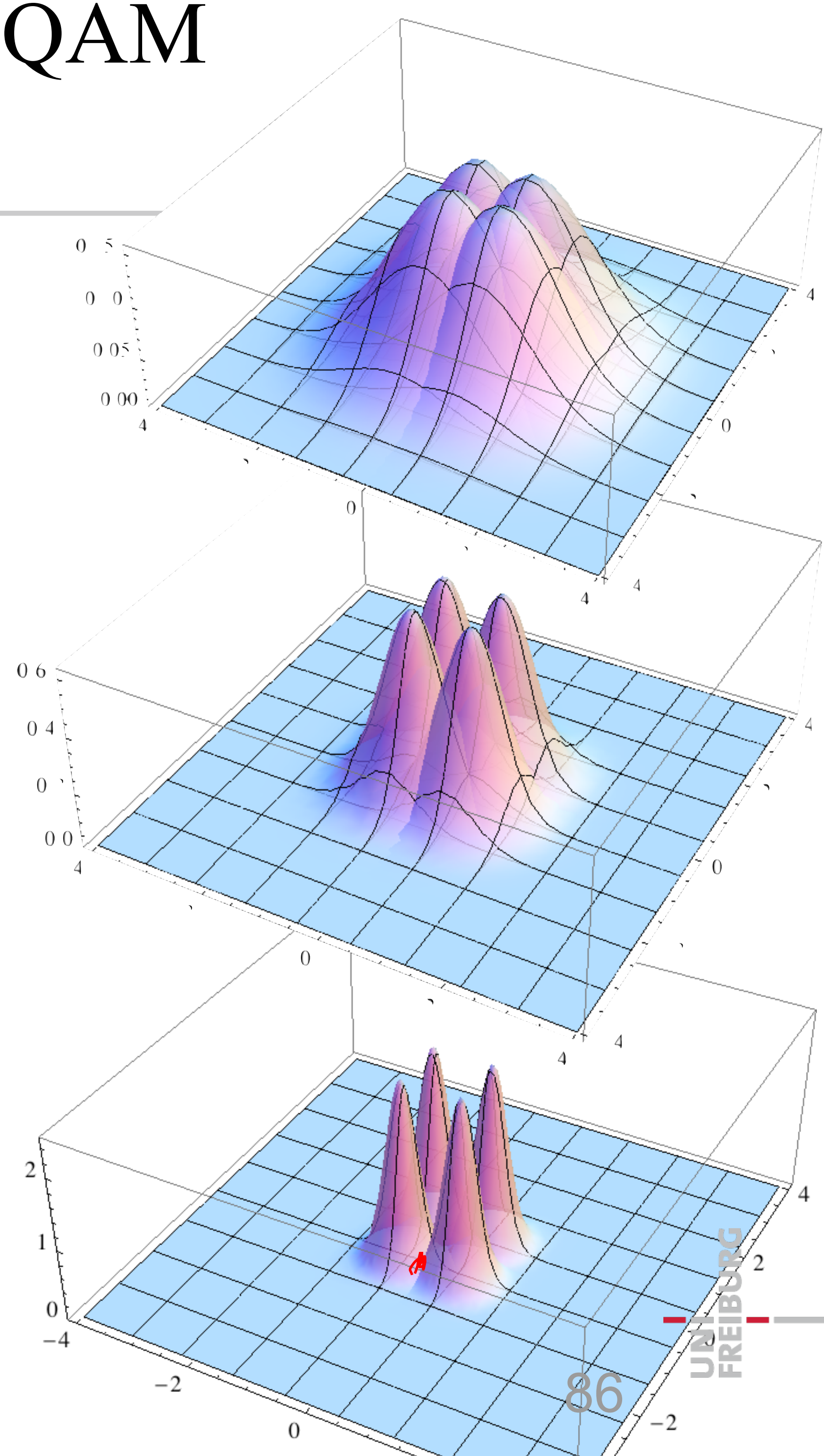
- Bitfehler entstehen, wenn das dekodierte Signal zu stark abweicht
- Das Signal/Rausch-verhältnis korreliert mit der Standardabweichung σ



QAM versus 16QAM



- Dichtere Codes erzeugen bei gleichem Rauschen mehr Fehler
- Codieren aber mehr Bits



Die Bitfehlerhäufigkeit und das Signalrauschverhältnis

- Je höher das Signal-Rausch-Verhältnis, desto geringer ist der auftretende Fehler
- Bitfehlerhäufigkeit (bit error rate - BER)
  - Bezeichnet den Anteil fehlerhaft empfangener Bits
- Abhängig von
  - Signalstärke,
  - Rauschen,
  - Übertragungsgeschwindigkeit
  - Verwendetem Verfahren
- Abhängigkeit der Bitfehlerhäufigkeit (BER) vom Signal-Rausch-Verhältnis
  - Beispiel:
    4 QAM, 16 QAM, 64 QAM, 256 QAM

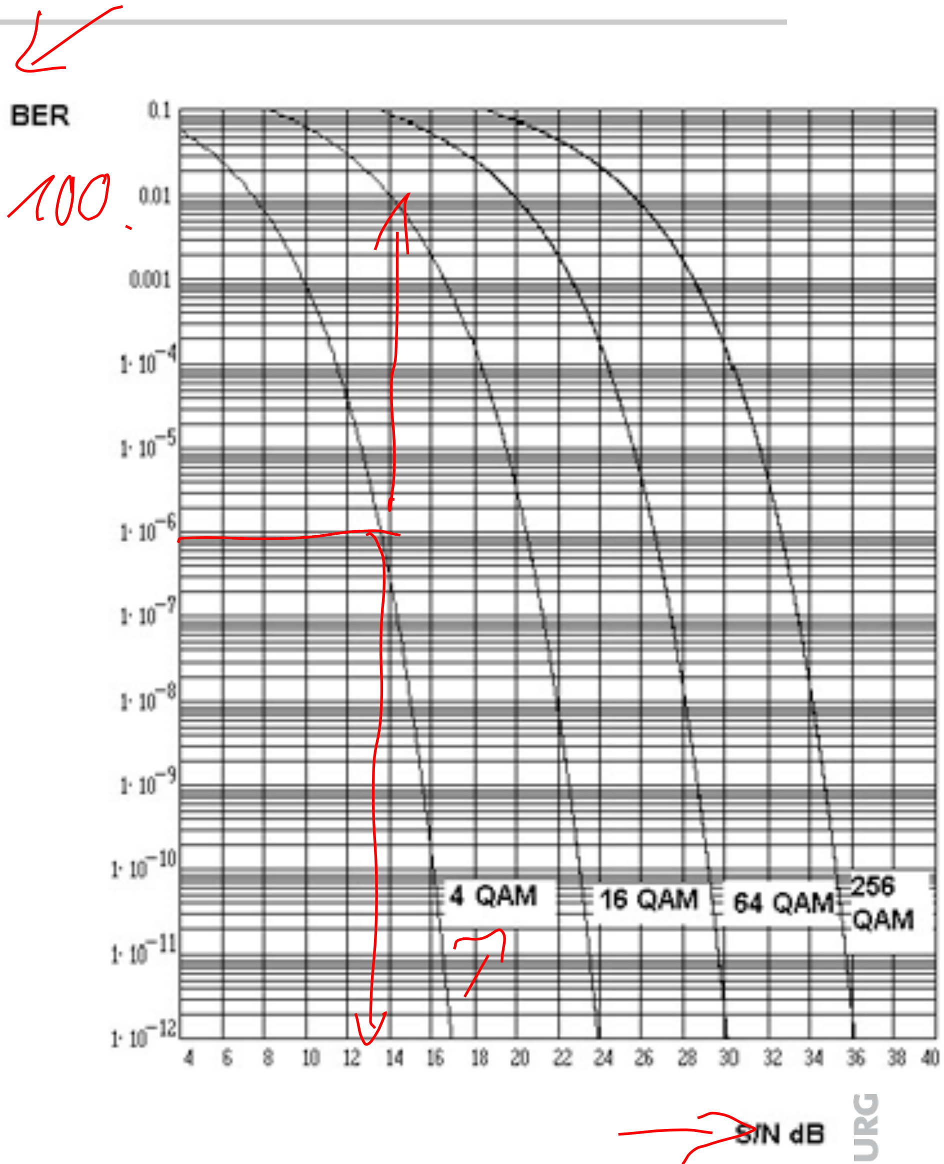


Abb. aus http://www.blondertongue.com/QAM-Transmodulator/Digital_Signal_Analysis.php

Systeme II

8. Die physikalische Schicht (Teil 4)

Thomas Janson°, Kristof Van Laerhoven*, Christian Ortolf°

Folien: Christian Schindelhauer°

Technische Fakultät

°: Rechnernetze und Telematik, *: Eingebettete Systeme